CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 1, No 2, 2020
DOI:
10.25037/cgantjma.v1i2.39

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Bilangan Kromatik *Graceful* pada Keluarga Graf *Unicyclic*

Nafisa Afwa Sania[2], Dafik[1,2], Arif Fatahillah[2]
[1]CGANT - University of Jember
[2]Department of Mathematics Education - University of Jember
nafisa123afwa@gmail.com, d.dafik@gmail.com, fatahillah767@gmail.com

Abstract

Suppose G is a graph, where $G = \{V(G), E(G)\}$. Graceful coloring is defined by $c : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ which induces a proper edge coloring $c' : E(G) \to \{1, 2, ..., k-1\}$ defined by $c'(xy) = |c(x) - c(y)|$, where $k \geq 2$, $k \in N$. Coloring is said to be graceful if these 3 conditions are satisfied, namely the proper vertex color, the proper edge color, and the edge color, which are the absolute difference between the color of the accident vertex. The subgraph H on that graceful coloring is smaller than the G. Furthermore, one of the subgraphs in the unicyclic graph family is a cycle graph. The graceful chromatic number on a graph denoted by $\chi_g(G)$, is the optimum number of graceful colors from graph G. This research aims to find graceful chromatic numbers in the unicyclic graph family, namely bull graphs, net graphs, cricket graphs, caveman graphs, peach graphs, and flowerpot graphs. The results of this study indicate that $\chi_g(C_l) \geq 4$, where C_l is a unicyclic graphs.

Keywords : Graceful coloring, Chromatic Graceful, Unicyclic Graphs.
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik (V) dan himpunan sisi (E) dimana V merupakan himpunan titik tak kosong dan E merupakan himpunan sisi yang didapat dari pasangan tak terurut dua titik v_1, v_2 dimana $v_1, v_2 \in V(G)$ [9]. Salah satu pembahasan khusus dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan pada suatu graf G dibagi menjadi tiga macam, yaitu pewarnaan pada tiitk, pewarnaan pada sisi, dan pewarnaan pada daerah. Pewarnaan titik pada graf G adalah suatu cara mewarnai pada titik G sehingga titik yang berdekatan diberi warna yang berbeda. Jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan titik G adalah bilangan kromatiknya, $\chi(G)$. Demikian pula, pewarnaan sisi pada graf G adalah suatu cara mewarnai sisi G sehingga sisi yang berdekatan diberi warna yang berbeda. Jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan sisi G adalah indeks kromatiknya, $\chi'(G)$ [4].

Topik pewarnaan dalam teori graf ada banyak. Beberapa hasil dari pewarnaan suatu graf dapat dilihat di [1] [2] [6]. Salah satu topik pewarnaan adalah pewarnaan *graceful*. Topik ini merupakan perkembangan dari pelabelan *graceful*. Pelabelan *graceful* G adalah fungsi injektif $f : V(G) \to \{0, 1, ..., m\}$ yang menghasilkan fungsi bijektif $f_0 : E(G) \to \{1, 2, ..., m\}$ didefinisikan dengan $f_0\ (uv) = |f(u) - f(v)|$. Pewarnaan k-*graceful* adalah pewarnaan titik dimana $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$, dengan $k \geq 2$ yang menginduksi pewarnaan sisi dimana $f_0 : E(G) \to \{1, 2, ..., k-1\}$ didefinisikan $f_0(uv) = |f(u) - f(v)|$ [3]. Menurut Mincu dkk (2019) pewarnaan k-*graceful* dari graf terhubung yang tidak berarah G adalah pewarnaan titik yang menggunakan k warna yang menginduksi pewarnaan sisi, di mana warna untuk sisi (u, v) adalah nilai absolut dari selisih antara warna pada titik yang bersinggungan dengan sisi tersebut [8]. Pewarnaan titik didefinisikan $c : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$, $k \geq 2$ dari graf G disebut pewarnaan *graceful* jika pewarnaan sisi yang diinduksi $c' : E(G) \to \{1, 2, ..., k-1\}$ didefinisikan oleh $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$ untuk setiap sisi uv dari G juga proper. Bilangan bulat minimum k pada graf tersebut adalah bilangan kromatik *graceful* $\chi_g(G)$ [5].

Graf *unicyclic* merupakan graf yang hanya memiliki satu siklus. Graf ini juga dapat diperoleh dari graf pohon yang ditambahkan dengan sisi baru [10]. Graf *unicyclic* memiliki n titik dan m sisi, dimana jumlah titik dan jumlah sisi pada graf *unicyclic* berjumlah sama. Graf ini dinotasikan dengan C_l, dimana l merupakan panjang dari graf *unicyclic* [7].

Penelitian ini telah dilakukan oleh English dan Zhang [5] yang menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf pohon. Selanjutnya Alfarisi, dkk [3] menemukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* (graf *tadpole*, graf *pan*, dan graf *sun*). Selanjutnya Mincu, dkk [8] juga telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada beberapa kelas graf khusus.

Lemma yang Digunakan

Lemma 1 dan Proposisi 1 digunakan untuk membantu proses penurunan batas bawah. Dalam pembuktian teorema pewarnaan *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* diperlukan Lemma dan Proposisi sebagai berikut:

Lemma 1. *Jika H adalah subgraf dari graf (G), maka $\chi_g(G) \geq \chi_g(H)$ [4].*

Jika G merupakan graf terhubung *nontrivial* dengan order lebih dari sama dengan 3, maka $\chi_g(C_n) = 4$, untuk $n \neq 5$ dan $\chi_g(C_n) = 5$, untuk $n = 5$ [4].

Hasil Penelitian

Penelitian ini menghasilkan enam teorema bilangan kromatik pewarnaan *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* yaitu graf *bull* $B_{3,m}$, graf *net* $N_{3,m}$, graf *cricket* $Cr_{m,n}$, graf *caveman* $C_{n,m}$, graf *peach* C_n^m, dan graf *flowerpot* C_nS_m. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ adalah 4. Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ adalah $\chi_g(B_{3,m}) = 4$, perlu dibuktikan menggunakan batas bawah $\chi_g(B_{3,m}) \geq 4$ dan batas atas $\chi_g(B_{3,m}) \leq 4$. Akan dibuktikan bahwa batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ adalah $\chi_g(B_{3,m}) \geq 4$. Graf C_3 merupakan subgraf dari graf $B_{3,m}$, sedemikian hingga berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 1, maka $\chi_g(B_{3,m}) \geq \chi_g(C_3) = 4$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ adalah $\chi_g(B_{3,m}) \leq 4$. Pewarnaan *proper* titik didefinisikan $f : V(B_{3,m}) \to \{1, 2, 3, 4\}$ diberikan oleh:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v \in \{x_{1j}, j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3j}, j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \\ 2, & \text{untuk } v \in \{x_{1j}, j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3j}, j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \\ 3, & \text{untuk } v \in \{x_{1j}, j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3j}, j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{21}\} \\ 4, & \text{untuk } v \in \{x_{1j}, j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3j}, j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap titik adalah proper, hal ini dapat dilihat pada $x_{i1} \neq x_{i+1,1}$; $x_{1j} \neq x_{1,j+1}$; dan $x_{3j} \neq x_{3,j+1}$.

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi dari graf *bull* $B_{3,m}$, $f: E(B_{3,m}) \to \{1,2,3\}$ diberikan oleh:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e \in \{x_{1j}x_{1,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{3,j}, x_{3,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan} \\ & \{x_{21}x_{31}\} \\ 2, & \text{untuk } e \in \{x_{1j}x_{1,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{3j}x_{3,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan} \\ & \{x_{11}x_{21}\} \\ 3, & \text{untuk } e \in \{x_{11}x_{31}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i1}x_{i+1,1} \neq x_{i+1,1}x_{i+2,1}$; $x_{1j}x_{1,j+1} \neq x_{1,j+1}x_{1,j+2}$; dan $x_{3j}x_{3,j+1} \neq x_{3,j+1}x_{3,j+2}$. □

Bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$, untuk $m \geq 2$ adalah 5. Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$ adalah $\chi_g(N_{3,m}) = 5$, perlu dibuktikan menggunakan batas bawah $\chi_g(N_{3,m}) \geq 5$ dan batas atas $\chi_g(N_{3,m}) \leq 5$. Akan dibuktikan bahwa batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$ adalah $\chi_g(N_{3,m}) \geq 5$. Asumsikan bahwa $\chi_g(N_{3,m}) < 5$. Ambil $\chi_g(N_{3,m}) = 4$. Jika graf $N_{3,m}$ diwarnai dengan empat warna, maka terdapat empat kemungkinan sebagai berikut:

a. Jika $x_{11}, x_{21}, x_{31} \in V(G)$ diberi warna $\{1,2,3\}$ sedemikian hingga $c(x_{11}) = 1, c(x_{21}) = 2, c(x_{31}) = 3 \in V(G)$ maka sisi $x_{11}x_{21}, x_{21}x_{31}, x_{31}x_{11} \in E(G)$ memiliki $c'(x_{11}x_{21}) = c'(x_{21}x_{31}) = c'(x_{31}x_{11}) = 1$. Hal ini kontradiksi karena tidak memenuhi definisi perwanaan *graceful* (sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama).

b. Jika $x_{11}, x_{21}, x_{31} \in V(G)$ diberi warna $\{2,3,4\}$ sedemikian hingga $c(x_{11}) = 2, c(x_{21}) = 3, c(x_{31}) = 4$ maka sisi pada $x_{11}x_{21}, x_{21}x_{31}, x_{31}x_{11} \in E(G)$ memiliki $c'(x_{11}x_{21}) = c'(x_{21}x_{31}) = c'(x_{31}x_{11}) = 1$. Hal ini kontradiksi karena tidak memenuhi definisi perwanaan *graceful* (sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama).

c. Jika x_{11}, x_{21}, $x_{31} \in V(G)$ diberi warna $\{1,2,4\}$ sedemikian hingga $c(x_{11}) = 1$, $c(x_{21}) = 2$, $c(x_{31}) = 4$ maka sisi pada $x_{11}x_{21}$, $x_{21}x_{31}$, $x_{31}x_{11} \in E(G)$ memiliki $c'(x_{11}x_{21}) = 1$, $c'(x_{21}x_{31}) = 2$, $c'(x_{31}x_{11}) = 3$ akan tetapi terdapat $x_{21}x_{22} \in E(G)$ dimana $c'(x_{21}x_{11}) = 1$, $c'(x_{21}x_{31}) = 2$ sehingga $c'(x_{21}x_{22}) = 3$. Karena $c'(x_{21}x_{22}) = 3$ dan $x_{21} = 2$, maka
$c'(x_{21}x_{22}) = |c(x_{21}) - c(x_{22})|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(x_{21}x_{22}) &= |c(x_{21}) - c(x_{22})| \\ 3 &= |2 - c(x_{22})| \\ 3 &= 2 - c(x_{22}) \\ c(x_{22}) &= 2 - 3 \\ c(x_{22}) &= -1 \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena warna sisinya bukan bilangan asli (tidak memenuhi definisi pewarnaan *graceful*).

untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(x_{21}x_{22}) &= |c(x_{21}) - c(x_{22})| \\ 3 &= |2 - c(x_{22})| \\ 3 &= (-2) + c(x_{22}) \\ c(x_{22}) &= 3 + 2 \\ c(x_{22}) &= 5 \end{aligned}$$

Jadi yang diambil adalah $c(x_{22}) = 5$, karena memenuhi definisi pewarnaan *graceful*, akan tetapi kontradiksi dengan asumsi awal.

d. Jika x_{11}, x_{21}, $x_{31} \in V(G)$ diberi warna $\{1, 3, 4\}$ sedemikian hingga $c(x_{11}) = 1$, $c(x_{21}) = 3$, $c(x_{31}) = 4$ maka sisi pada $x_{11}x_{21}$, $x_{21}x_{31}$, $x_{31}x_{11} \in E(G)$ memiliki $c'(x_{11}x_{21}) = 2$, $c'(x_{21}x_{31}) = 1$, $c'(x_{31}x_{11}) = 3$ akan tetapi terdapat $x_{21}x_{22} \in E(G)$ dimana $c'(x_{21}x_{11}) = 2$, $c'(x_{21}x_{31}) = 1$ sehingga $c'(x_{21}x_{22}) = 3$. Karena $c'(x_{21}x_{22}) = 3$ dan $x_{21} = 3$, maka
$c'(x_{21}x_{22}) = |c(x_{21}) - c(x_{22})|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(x_{21}x_{22}) &= |c(x_{21}) - c(x_{22})| \\ 3 &= |3 - c(x_{22})| \\ 3 &= 3 - c(x_{22}) \\ c(x_{22}) &= 3 - 3 \\ c(x_{22}) &= 0 \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena warna sisinya bukan bilangan asli (tidak memenuhi definisi pewarnaan *graceful*).
untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(x_{21}x_{22}) &= |c(x_{21}) - c(x_{22})| \\ 3 = | & \quad 3 \quad -c(x_{22})| \\ 3 &= (-3) + c(x_{22}) \\ c(x_{22}) &= 3 + 3 \\ c(x_{22}) &= 6 \end{aligned}$$

Jadi yang diambil adalah $c(x_{22}) = 6$, karena memenuhi definisi pewarnaan *graceful*, akan tetapi kontradiksi dengan asumsi awal.

Sehingga asumsi awal salah, jadi batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* graf *net* $N_{3,m}$ adalah $\chi_g(N_{3,m}) \geq 5$.

Selanjutnya akan buktikan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$ adalah $\chi_g(N_{3,m}) \leq 5$. Pewarnaan *proper* titik didefinisikan $f : V(N_{3,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ diberikan oleh:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v \in \{x_{3,j}, j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \\ 2, & \text{untuk } v \in \{x_{1,j}, j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{2,j}, j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3,j}, \\ & j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \\ 3, & \text{untuk } v \in \{x_{1,j}, j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{2,j}, j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \\ 4, & \text{untuk } v \in \{x_{1,j}, j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{2,j}, j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3,j}, \\ & j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \\ 5, & \text{untuk } v \in \{x_{1,j}, j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{2,j}, j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{x_{3,j}, \\ & j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i1} \neq x_{i+1,1}$; $x_{1j} \neq x_{1,j+1}$; $x_{2j} \neq x_{2,j+1}$; dan $x_{3j} \neq x_{3,j+1}$.

Dapat dilihat bahwa fungsi *f* juga menginduksi pewarnaan sisi dari $N_{3,m}$, $f : E(N_{3,m}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ diberikan oleh:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e \in \{x_{1j}, x_{1,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{2j}x_{2,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan} \\ & \{x_{3j}x_{3,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{2,1}x_{3,1}\} \\ 2, & \text{untuk } e \in \{x_{1j}x_{1,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{2j}x_{2,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan} \\ & \{x_{11}x_{21}\} \\ 3, & \text{untuk } e \in \{x_{3j}x_{3,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{11}x_{31}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i1}x_{i+1,1} \neq x_{i+1,1}x_{i+2,1}$; $x_{1j}x_{1,j+1} \neq x_{1,j+1}x_{1,j+2}$; $x_{2j}x_{2,j+1} \neq x_{2,j+1}x_{2,j+2}$; dan $x_{3j}x_{3,j+1} \neq x_{3,j+1}x_{3,j+2}$.
$\square$ Bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah 5. Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$ adalah $\chi_g(Cr_{n,m}) = 5$, perlu dibuktikan menggunakan batas bawah $\chi_g(Cr_{n,m}) \geq 5$ dan batas atas $\chi_g(Cr_{n,m}) \leq 5$. Akan dibuktikan bahwa batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$ adalah $\chi_g(Cr_{n,m}) \geq 5$.

Kasus 1. Graf C_n merupakan subgraf dari graf $Cr_{n,m}$, sedemikian hingga berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 1, maka $\chi_g(Cr_{n,m}) \geq \chi_g(C_n) = 5$, untuk $n = 5$.

Kasus 2. Untuk $n \neq 5$, asumsikan bahwa $\chi_g(Cr_{n,m}) < 5$. Ambil $\chi_g(Cr_{n,m}) = 4$, graf $Cr_{n,m}$ diwarnai dengan empat warna. Ambil titik yang berderajat 4, yaitu x_1. x_1 memiliki sisi $x_1x_2, x_1x_n, x_1y_{11}, x_1y_{21} \in E(G)$. Setiap sisi yang berkaitan dengan x_1 disyaratkan memiliki warna yang minimum dan berbeda. Sedemikian hingga $c'(E(G)) = \{1, 2, 3, 4\}$, sehingga memiliki kemungkinan :
$c' = 1 \rightarrow c = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
$c' = 2 \rightarrow c = \{(1, 3), (2, 4)\}$
$c' = 3 \rightarrow c = \{(1, 4)\}$
$c' = 4$, maka

$$\begin{aligned} c'(x) &= |c(x) - c(y)| \\ 4 &= |c(x) - c(y)| \\ c(x) &= 4 + c(y) \\ c(x) &> 4 \end{aligned}$$

Ambil x_1 sebagai titik pelekatan antara graf lingkaran dan graf lintasan, sedemikian hingga terdapat $x_1x_2, x_1x_n, x_1y_{11}, x_1y_{21} \in E(G)$. Pilih $c(y_{11}) = 1$ dan $c'(x_1y_{11}) = 4$, maka $c'(x_1y_{11}) = |c(y_{11}) - c(x_1)|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(x_1y_{11}) &= |c(y_{11}) - c(x_1)| \\ 4 &= |1 - c(x_1)| \\ 4 &= 1 - c(x_1) \\ c(x_1) &= 1 - 4 \\ c(x_1) &= -3 \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena warna sisinya bukan bilangan asli (tidak memenuhi definisi pewarnaan *graceful*).
untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(x_1y_{11}) &= |c(y_{11}) - c(x_1)| \\ 4 &= |1 - c(x_1)| \\ 4 &= -1 + c(x_1) \\ c(x_1) &= 4 + 11 \\ c(x_1) &= 5 \end{aligned}$$

Jadi yang diambil adalah $c(x_1) = 5$, karena memenuhi definisi pewarnaan *graceful*, akan tetapi kontradiksi dengan asumsi awal.
Sehingga asumsi awal salah, jadi batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* graf *cricket* $Cr_{n,m}$ adalah $\chi_g(Cr_{n,m}) \geq 5$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$ adalah $\chi_g(Cr_{n,m}) \leq 5$. Pewarnaan *proper* titik didefinisikan $f : V(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ diberikan oleh:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v \in \{y_1j, j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_2j, j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \\ 2, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_1j, j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_2j, \\ & j \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \\ 3, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_1j, j \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_2j, \\ & j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \\ 4, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_1j, j \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_2j, \\ & j \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \\ 5, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_i \neq x_{i+1}$; $y_{1j} \neq y_{1,j+1}$; dan $y_{2j} \neq y_{2,j+1}$.

Dapat dilihat bahwa fungsi *f* juga menginduksi pewarnaan sisi dari $Cr_{n,m}$, $f : E(Cr_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ diberikan oleh:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e \in \{x_i, x_{i+1}, i \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{y_{1,j}y_{1,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan} \\ & \{y_{2,j}y_{2,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \\ 2, & \text{untuk } e \in \{x_i, x_{i+1}, i \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{y_{1,j}y_{1,j+1}, j \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan} \\ & \{y_{2,j}y_{2,j+1}, j \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \\ 3, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_{2,j}\} \\ 4, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_{1,j}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_i, x_{i+1} \neq x_{i+1}, x_{i+2}$; $y_{1,j}y_{1,j+1} \neq y_{1,j+1}y_{1,j+2}$; dan $y_{2,j}y_{2,j+1} \neq y_{2,j+1}y_{2,j+2}$. □

Bilangan kromatik graceful pada graf caveman $C_{(n,m)}$, untuk $n, m \geq 3$ adalah 4. Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf *caveman* $C_{(n,m)}$ adalah $\chi_g(C_{(n,m)}) = 4$, perlu dibuktikan menggunakan batas bawah $\chi_g(C_{(n,m)}) \geq 4$ dan batas atas $\chi_g(C_{(n,m)}) \leq 4$. Akan dibuktikan bahwa batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *caveman* $C_{(n,m)}$ adalah $\chi_g(C_{(n,m)}) \geq 4$. Graf C_n merupakan subgraf dari graf $C_{(n,m)}$, sedemikian hingga berdasarkan Lemma 1 dan Proposisi 1, maka $\chi_g(C_{(n,m)}) \geq \chi_g(C_n) = 4$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *caveman* $C_{(n,m)}$ adalah $\chi_g(C_{(n,m)}) \leq 4$. Pewarnaan *proper* titik didefinisikan $f : V(C_{(n,3)}) \to \{1, 2, 3, 4\}$ diberikan oleh:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v \in \{x_{i1}, i \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{i2}, i \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \\ 2, & \text{untuk } v \in \{x_{i3}, i \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \\ 3, & \text{untuk } v \in \{x_{i1}, i \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{x_{i2}, i \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \\ 4, & \text{untuk } v \in \{x_{i3}, i \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $\{x_{i1} \neq x_{i3}$; $x_{i1} \neq x_{i2}$; $x_{i3} \neq x_{i+1,1}$.

Dapat dilihat bahwa fungsi *f* juga menginduksi pewarnaan sisi dari $C_{(n,m)}$, $f : E(C_{(n,3)}) \to \{1, 2, 3\}$ diberikan oleh:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e \in \{x_{i1}x_{i3}\} \\ 2, & \text{untuk } e \in \{x_{i3}x_{i+1,1}\} \\ 3, & \text{untuk } e \in \{x_{i1}x_{i+1,2}\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i1}x_{i3} \neq x_{i1}x_{i2} \neq x_{i1}x_{i+1,1}$. □

Bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah $m + 3$. Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m adalah $\chi_g(C_n^m) = m + 3$, perlu dibuktikan menggunakan batas bawah $\chi_g(C_n^m) \geq m + 3$ dan batas atas $\chi_g(C_n^m) \leq m + 3$. Akan dibuktikan bahwa batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m adalah $\chi_g(C_n^m) \geq m + 3$. Misal x_i merupakan graf lingkaran, x_1 merupakan titik pelekatan *pendant* pada graf lingkaran, y_j merupakan *pendant* dan $y_j x_1 \in E(G)$. Asumsikan bahwa $\chi_g(C_n^m) < m + 3$. Ambil $\chi_g(C_n^m) = m + 2$, warnai graf C_n^m dengan $m + 2$ warna, sehingga
$m + 2 = c'$
$m + 2 = |c(x_1) - c(y_j)|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} m+2 &= |c(x_1) - c(y_j)| \\ m+2 &= c(x_1) - c(y_j) \\ c(x_1) &= c(y_j) + m + 2 \\ c(x_1) &> m+2 \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena kontradiksi dengan asumsi awal.
untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} m+2 &= |c(x_1) - c(y_j)| \\ m+2 &= c(x_1) - c(y_j) \\ c(x_1) &= c(y_j) - (m+2) \\ c(x_1) &> m+2 \end{aligned}$$

Ambil x_1 sebagai titik pelekatan antara graf lingkaran dan graf lintasan, sedemikian hingga terdapat $x_1 y_j \in E(G)$. Pilih $c(y_1) = 1$ dan $c'(y_1 x_1) = m+2$, maka
$c'(y_1 x_1) = |c(y_1) - c(x_1)|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(y_1 x_1) &= |c(y_1) - c(x_1)| \\ m+2 &= |1 - c(x_1)| \\ m+2 &= 1 - c(x_1) \\ c(x_1) &= 1 - m - 2 \\ c(x_1) &= -1 - m \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena warna sisinya bukan bilangan asli (tidak memenuhi definisi pewarnaan *graceful*)
untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(y_1 x_1) &= |c(y_1) - c(x_1)| \\ m+2 &= |1 - c(x_1)| \\ m+2 &= -1 + c(x_1) \\ c(x_1) &= m + 2 + 1 \\ c(x_1) &= m + 3 \end{aligned}$$

Sehingga asumsi awal salah, jadi batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* graf *peach* C_n^m adalah $\chi_g(C_n^m) \geq m+3$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m adalah $\chi_g(C_n^m) \leq m+3$. Pewarnaan *proper* titik didefinisikan $f : V(C_{12}^5) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ diberikan oleh:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \\ 2, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \\ 3, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \\ 4, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_1\} \\ 5, & \text{untuk } v \in \{y_2\} \\ 6, & \text{untuk } v \in \{y_3\} \\ 7, & \text{untuk } v \in \{y_4\} \\ 8, & \text{untuk } v \in \{y_5\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_i \neq xi + 1$ dan $x_1 \neq y_j$

Dapat dilihat bahwa fungsi *f* juga menginduksi pewarnaan sisi dari C_n^m, $f : E(C_1 2^5) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ diberikan oleh:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e \in \{x_i, x_{i+1}, i \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \\ 2, & \text{untuk } e \in \{x_i, x_{i+1}, i \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \\ 3, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_1\} \\ 4, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_2\} \\ 5, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_3\} \\ 6, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_4\} \\ 7, & \text{untuk } e \in \{x_1 y_5\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_i x_{i+1} \neq x_{i+1} x_{i+2}$ dan $x_i x_{i+1} \neq x_i x_n \neq x_1 y_j$. □

Bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* $C_n S_m$, untuk $n, m \geq 3$ adalah $m + 2$. Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* $C_n S_m$ adalah $\chi_g(C_n S_m) = m + 2$, perlu dibuktikan menggunakan batas bawah $\chi_g(C_n S_m) \geq m + 2$ dan batas atas $\chi_g(C_n S_m) \leq m + 2$. Akan dibuktikan bahwa batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* $C_n S_m$ adalah $\chi_g(C_n S_m) \geq m + 2$. Misal x_i merupakan graf lingkaran, a merupakan titik pelekatan graf bintang, y_j merupakan *pendant* dan $y_j a \in E(G)$. Asumsikan bahwa $\chi_g(C_n S_m) < m + 2$. Ambil $\chi_g(C_n S_m) = m + 1$, warnai graf $C_n S_m$ dengan $m + 1$ warna, sehingga
$m + 1 = c'$
$m + 1 = |c(a) - c(y_j)|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} m + 1 &= |c(a) - c(y_j)| \\ m + 1 &= c(a) - c(y_j) \\ c(a) &= m + 1 + c(y_j) \\ c(a) &> m + 1 \end{aligned}$$

untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} m+1 &= |c(a) - c(y_j)| \\ m+1 &= -c(a) + c(y_j) \\ c(a) &= c(y_j) - (m+1) \\ c(a) &> m+1 \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena kontradiksi dengan asumsi awal.
Ambil a sebagai titik pelekatan antara graf bintang dan sisi yang menghubungkan antara graf lingkaran dan graf bintang, sedemikian hingga terdapat $ay_j \in E(G)$. Pilih $c(y_1) = 1$ dan $c'(ay_1) = m+1$, maka $c'(ay_1) = |c(y_1) - c(a)|$, dimana

$$|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x < 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(ay_1) &= |c(y_1) - c(a)| \\ m+1 &= |c(y_1) - c(a)| \\ m+1 &= 1 - c(a) \\ c(a) &= 1 - m - 1 \\ c(a) &= -m \end{aligned}$$

sehingga tidak digunakan karena warna sisinya bukan bilangan asli (tidak memenuhi definisi pewarnaan *graceful*)
untuk $x < 0$, maka

$$\begin{aligned} c'(ay_1) &= |c(y_1) - c(a)| \\ m+1 &= |c(y_1) - c(a)| \\ m+1 &= -1 + c(a) \\ c(a) &= m+1+1 \\ c(a) &= m+2 \end{aligned}$$

Sehingga asumsi awal salah, jadi batas bawah dari bilangan kromatik *graceful* graf *flowerpot* C_nS_m adalah $\chi_g(C_nS_m) \geq m+2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* C_nS_m adalah $\chi_g(C_nS_m) \leq m+2$. Pewarnaan *proper* titik didefinisikan $f : V(C_8S_7) \to \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ diberikan oleh:

$$f(v) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 1 \text{ (mod 4)}\} \\ 2, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 0 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_7\} \\ 3, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 2 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_6\} \\ 4, & \text{untuk } v \in \{x_i, i \equiv 3 \text{ (mod 4)}\} \text{ dan } \{y_5\} \\ 5, & \text{untuk } v \in \{y_4\} \\ 6, & \text{untuk } v \in \{y_3\} \\ 7, & \text{untuk } v \in \{y_2\} \\ 8, & \text{untuk } v \in \{y_1\} \\ 9, & \text{untuk } v \in \{a\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_i \neq x_{i+1}$; $x_1 \neq a$; dan $a \neq y_j$.

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi dari C_nS_m, $f : E(C_8S_7) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ diberikan oleh:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e \in \{x_ix_{i,i+1}, i \equiv 1 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{ay_1\} \\ 2, & \text{untuk } e \in \{x_ix_{i,i+1}, i \equiv 0 \text{ (mod 2)}\} \text{ dan } \{ay_2\} \\ 3, & \text{untuk } e \in \{ay_3\} \\ 4, & \text{untuk } e \in \{ay_4\} \\ 5, & \text{untuk } e \in \{ay_5\} \\ 6, & \text{untuk } e \in \{ay_6\} \\ 7, & \text{untuk } e \in \{ay_7\} \\ 8, & \text{untuk } e \in \{x_1a\} \end{cases}$$

Jadi warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_ix_{i+1} \neq x_{i+1}x_{i+2}$ dan $ay_j \neq ay_{j+1} \neq ... \neq ay_m$. □

Kesimpulan

Pada penelitian ini telah ditemukan enam bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*, yaitu:

1. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ untuk $m \geq 2$ adalah 4.
2. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$, untuk $m \geq 2$ adalah 5.
3. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah 5.
4. Bilangan kromatik graceful pada graf caveman $C_{(n,m)}$, untuk $n, m \geq 3$ adalah 4.
5. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah $m + 3$.
6. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* C_nS_m, untuk $n, m \geq 3$ adalah $m+2$.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan *graceful* pada beberapa graf *unicyclic*, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat

Masalah terbuka 1 *Mengembangkan teori pewarnaan graceful pada keluarga graf lainnya, seperti keluarga graf roda, keluarga graf buku, dll.*

References

[1] Agustin, I. H., Dafik, Hasan, M., Alfarisi, R. dan Prihandini, R. M. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences* **102**(9): 1925-1941.

[2] Agustin, I. H., Dafik, Kurniawati, E. Y., Alfarisi, R., Prihandini, R. M., dan Kristiana, A. I. 2018. On super local antimagic total edge coloring of some wheel related graphs. *International Conference on Science and Applied Science (ICSAS) 2018* 21 September 2018 *AIP Conference Proceedings 2014* 020088(1): 1-7.

[3] Alfarisi, R., Dafik, Prihandini, R. M., Adawiyah, R., Albirri, E. R., dan Agustin, I. H. 2019. Graceful Chromatic Number of Unicyclic Graphs. *Journal of Physics: Conference Series Institute of Physics Publishing* **1306**(1): 1-8. .

[4] Bi, Z., Byers, A., English, S., Laforge, E. dan Zhang, P. 2017. Graceful colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **101**: 101-119.

[5] English, S. dan Zhang, P. 2017. On graceful colorings of trees. *Mathematica Bohemica* **142**(1): 57-73.

[6] Ghafrina, S. I., Slamin, Dafik, Fatahillah, A. dan Prihandoko, A. C. 2018. Pewarnaan Titik Total Antijaib Lokal pada Graf Hasil Operasi Korona dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Saintifika* **2**(2): 32-42.

[7] Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1994. *Pearls In Graph Theory*. Australia: Academic Press.

[8] Mincu, R., Obreja, C. dan Popa, A. 2019. The Graceful Chromatic Number for Some Particular Classes of Graphs. *Proceedings - 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing. SYNASC 2019*: 109-115.

[9] Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Bandung: Informatika Bandung.

[10] Rongbo, Z. Y. Zhang, B. Liu, dan C. Liu. 2010. *Information Computing and Applications*. China: Springer.